

# MATRICES ALÉATOIRES ET HYPERCARTES

PASCAL LEZAUD

## 1. INTRODUCTION

Coller les  $2n$  arêtes d'un polygone par paires permet de construire une surface compacte orientée de genre  $g$ . L'identification des arêtes implique une identification des sommets du polygone ; ce processus fournit ainsi un graphe tracé sur la surface de genre  $g$  ayant  $E = n$  arêtes,  $F = 1$  face et un nombre  $V$  de sommets tel que  $V - E + F = 2 - 2g$ . Pour la sphère de genre  $g = 0$ , nous obtenons la relation  $V = E + 1$ , caractéristique d'un arbre et dans ce cas, les segments reliant les arêtes identifiées ne se croisent pas.

Pour dénombrer le nombre de tels appariements, notés  $\sigma$ , introduisons les polynômes  $T_n(N)$  défini par

$$T_n(N) = \sum_{\sigma} N^{V(\sigma)} = \sum_{g=0}^{\infty} \epsilon_g(n) N^{n+1-2g},$$

où  $V(\sigma)$  est le nombre de sommets obtenus par l'appariement  $\sigma$ . Le nombre total de tels appariements étant  $(2n - 1)!! = 1.3. \dots .(2n - 1)$ , nous avons  $T_n(1) = (2n - 1)!!$ .

$$T_1(N) = N^2,$$

$$T_2(N) = 2N^3 + N,$$

$$T_3(N) = 5N^4 + 10N^2,$$

$$T_4(N) = 14N^5 + 70N^3 + 21N.$$

Les coefficients  $\epsilon_g(n)$  dénombrent donc le nombre de collages conduisant à une surface de genre  $g$ . Le cas  $g = 0$  est bien connu puisque les  $\epsilon_0(n)$  sont égaux aux fameux nombres de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Considérons la fonction génératrice

$$T(N, s) = 1 + 2Ns + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(N)}{(2n-1)!!} s^n.$$

D'après un résultat du à Harer, J. et Zagier, D. (1986),

$$T(N, s) = \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^N,$$

duquel découle la relation de récurrence suivante :

$$(1) \quad (n+2)\epsilon_g(n+1) = (4n+2)\epsilon_g(n) + (4n^3 - n)\epsilon_{g-1}(n-1),$$

avec  $\epsilon_g(0) = 1$  si  $g = 0$  et 0 sinon.

*Remarque 1.1* (D. Zagier). Introduisons les coefficients  $C_g(n)$  par la formule  $2^g \epsilon_g(n) = C_n C_g(n)$ , alors l'équation (1) devient

$$C_g(n+1) = C_g(n) + \binom{n+1}{2} C_{g-1}(n-1).$$

Ceci implique que  $C_g(n)$  est un entier positif et, pour un  $g$  fixé, aussi un polynôme de degré  $3g$  en  $n$  avec des racines en  $n = -1, 0, 1, \dots, 2g-1$ .

L'approche utilisée par Harer et Zagier pour obtenir ces résultats s'appuie sur le calcul des moments des matrices aléatoires gaussiennes du GUE. Une preuve combinatoire a cependant été obtenue depuis par B. Lass (2001). L'intervention des intégrales gaussiennes dans un problème de dénombrement découle du théorème de Wick qui transforme un calcul d'intégrale en un calcul algébrique.

**Théorème 1.2** (Formule de Wick). *Soit  $(x_1, \dots, x_k)$  un vecteur gaussien centré et de covariance l'identité. Soient  $f_1, \dots, f_{2n}$  un ensemble de fonctions linéaires des  $x_1, \dots, x_k$  (non nécessairement distinctes), alors*

$$\mathbb{E}(f_1 \cdots f_{2n}) = \sum \mathbb{E}(f_{p_1} f_{q_1}) \mathbb{E}(f_{p_2} f_{q_2}) \cdots \mathbb{E}(f_{p_n} f_{q_n}),$$

où la somme porte sur toutes les permutations  $p_1 q_1 p_2 q_2 \cdots p_n q_n$  de  $\{1, \dots, 2n\}$  telles que  $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < q_1 < \cdots < q_n$ .

Le nombre de termes de la somme est  $(2n-1)!!$ , et une telle permutation est appelée couplage de Wick ou permutation non croisée.

Soit  $\mathcal{H}_N$  l'ensemble des  $N \times N$  matrices hermitiennes  $H$  dont les entrées sont des nombres complexes  $h_{ij}$ , avec  $h_{ii} := x_{ii} \in \mathbb{R}$  et  $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$ . Posons  $h_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$ , et supposons que  $x_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , pour  $i < j$   $x_{ij}, y_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ , et que ces v.a. sont indépendantes. La mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_N$  est,

$$(2\pi)^{-N^2/2} 2^{(N^2-N)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(H^2) \right\} dv(H),$$

où  $dv(H) = \prod_{i=1}^N dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij} dy_{ij}$ . Notons que  $\mathbb{E}(h_{ij} h_{kl}) = \delta_{il} \delta_{kj}$ .

Calculons maintenant  $\mathbb{E}(\text{tr} H^4)$ . Nous obtenons grâce au théorème de Wick

$$\mathbb{E}(\text{tr} H^4) = \sum_{ijkl} \delta_{ik} + \sum_{ijkl} \delta_{jl} + \sum_{ijkl} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{ji} \delta_{kl} = N + 2N^3 = T_2(N).$$

Ce résultat établi donc un lien entre les matrices aléatoires gaussiennes et les polynômes  $T_n(N)$ .

**Proposition 1.3.**

$$\mathbb{E}(\text{tr} H^{2n}) = T_n(N).$$

Nous pouvons étendre ces calculs de la façon suivante. Soit  $\sigma \in S_n$  une permutation sur  $\{1, \dots, n\}$ ; nous noterons  $C(\sigma)$  l'ensemble de ses cycles. Sa décomposition en cycle fournit une partition  $\lambda \vdash n$  de  $\{1, \dots, n\}$ ; i.e. que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , où les  $\lambda_i$  correspondent aux longueurs respectives des  $p = \ell(\sigma)$  cycles de  $C(\sigma)$ . Représentons  $\lambda$  sous la forme  $\lambda = 1^{d_1} \cdots n^{d_n}$  où  $d_i$  est le nombre de cycles de longueur  $i$  et considérons le moment suivant

$$q_\sigma(H) = \prod_{i=1}^p (\text{tr} H^i)^{d_i},$$

alors

$$(2) \quad \mathbb{E}[q_\sigma(H)] = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}(n)} N^{\ell(\alpha\sigma)},$$

où  $\mathcal{I}(n)$  est l'ensemble des involutions sans point fixe de  $S_n$  et  $\ell(\alpha\sigma)$  est le nombre de cycles disjoints de la décomposition de  $\alpha\sigma$ .

Par ailleurs, il est possible de construire un graphe orienté étiqueté (dit combinatoire)  $\Gamma$  à  $n$  arêtes, pour lequel la décomposition en cycles de la permutation  $\sigma$  codera les  $\ell(\sigma)$  sommets de degré respectifs  $\lambda_i$ , l'involution sans point fixe  $\alpha$  codera les arêtes  $(i, \alpha(i))$  et  $\alpha\sigma$  les faces. Notons que le collage par paires des arêtes d'un  $2n$ -polygone peut s'interpréter de façon duale comme les couplages des  $2n$  arêtes issue d'un même sommet ; il en résultera un graphe ayant un seul sommet mais dont le nombre de faces sera donné par le genre du graphe ( $\sigma = (1, 2, \dots, 2n)$ ). Ainsi l'équation (2) peut s'écrire sous la forme

$$(3) \quad \mathbb{E}[q_\sigma(H)] = \sum_{\Gamma \in G(\sigma)} N^{F(\Gamma)},$$

où  $G(\sigma)$  est l'ensemble des graphes étiquetés (non nécessairement connexes) dont les sommets sont fixés par la structure en cycles de  $\sigma$  et les arêtes par des involutions sans points fixes.

Il est souvent plus intéressant d'exprimer le terme de droite de (3) comme une somme sur les cartes à isomorphisme près. Dans ce cas, la contribution de chaque graphe est l'inverse de l'ordre de son groupe d'automorphisme  $\text{Aut}(\Gamma)$  ; le groupe des permutations  $\pi$  des sommets telles que  $(\pi(i), \pi(j))$  est une arête si et seulement si  $(i, j)$  est une arête. Notons qu'il est équivalent de dire que  $\pi$  commute avec  $\sigma$  et  $\alpha$ . Nous obtenons l'expression suivante

$$(4) \quad \frac{1}{n!} \mathbb{E}[q_\sigma(H)] = \frac{1}{|C(\lambda)|} \sum_{\Gamma} \frac{N^{F(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|},$$

où la somme porte sur tous les graphes (non nécessairement connexes) ayant  $d_1$  sommets de degré 1,  $d_2$  sommets de degré 2,  $\dots$ , et  $C(\lambda)$  désigne la classe de conjugaison de  $\sigma$  qui ne dépend que de la partition  $\lambda$  (cf. figure 1).

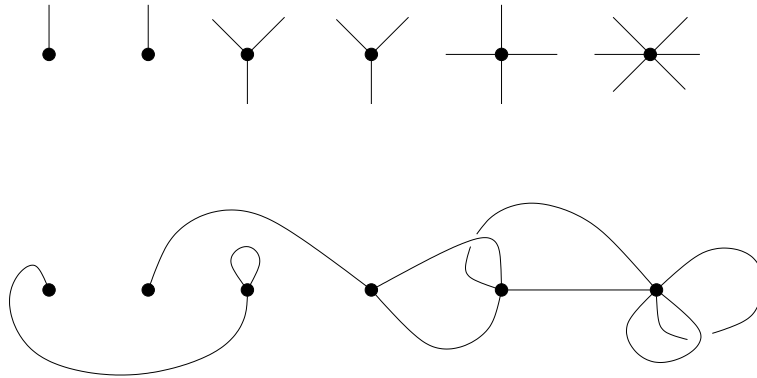


FIG. 1. Exemple de collage d'un ensemble d'étoiles

Rappelons que

$$|C(\lambda)| = \frac{n!}{d_1! \dots d_n! 1^{d_1} \dots n^{d_n}},$$

et le facteur  $d_1! \dots d_n! 1^{d_1} \dots n^{d_n}$  dénombre les permutations des étoiles et des arêtes ; c'est le cardinal du groupe  $\prod_{j=1}^n (\mathbb{Z}/j\mathbb{Z})^{\lambda_j} \times \prod_{j=1}^k \mathfrak{S}_{\lambda_j}$ .

Pour se débarrasser de ces termes, il est courant de considérer des graphes enracinés dont l'arête racine porte l'étiquette 1. La figure 2 illustre le cas  $\mathbb{E}(\text{tr}H^4)$ , et visualise que fixer l'arête étiquetée 1 rend trivial le groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$  et tue les possibilités de permutations des arêtes et des étoiles.

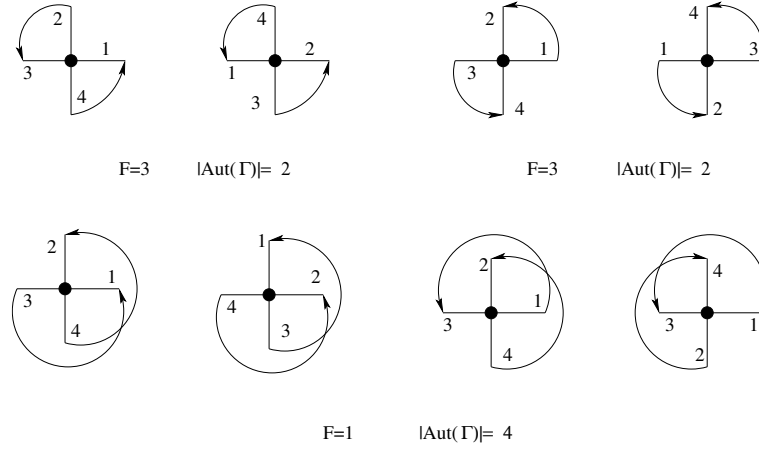


FIG. 2. Exemple avec une étoile de degré 4

Il est encore possible d'étendre nos modèles de la façon suivante. Soit  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  une coloration des arêtes par  $s$  couleurs ; considérons l'expression

$$q_{\sigma,t}(H_1, \dots, H_s) = \prod_{c \in C(\sigma)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} X_{t(j)} \right),$$

où les  $H_i$  sont indépendantes. Les structures associées à ces moments sont appelées des hypercartes colorées, elles généralisent la notion de cartes combinatoires en ce que la permutation  $\alpha$  codant les arêtes, n'est plus nécessairement une involution et devra vérifier  $t = t \circ \alpha$ . Cette dernière condition signifie qu'une arête ne pourra relier que des sommets de même couleur. Cette construction englobe le cas des monômes non commutatifs en  $H_1, \dots, H_s$ . Nous verrons aussi une extension aux matrices de Wishart.

## 2. CARTES ET HYPERCARTES

**2.1. Cartes.** Un *graphe* est un triplet  $\Gamma = (V, E, I)$  formé d'un ensemble fini de *sommets*  $V$ , d'un ensemble fini d'*arêtes*  $E$  et d'une relation d'*incidence*  $I$  entre les éléments de  $V$  et les éléments de  $E$  telle que toute arête  $e \in E$  est incidente soit à deux sommets disjoints  $u, v \in V$ , soit incidente deux fois à un même sommet  $v \in V$  ; dans ce dernier cas l'arête sera appelée *boucle*.

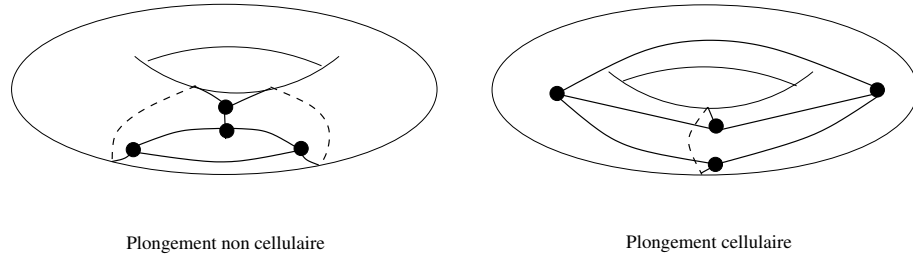
Il se peut que plusieurs arêtes soient incidentes à la même paire de sommets  $u, v$  ; elles seront appelées *arêtes multiples*. Un chemin dans le graphe est une suite  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$  telle que chaque arête  $e_i$  est incidente aux sommets  $v_{i-1}$  et  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Lorsque  $v_0 = v_n$ , le chemin sera appelé *cycle*.

Le *degré*,  $d(v)$  d'un sommet  $v$  est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes (les boucles étant comptées deux fois). Nous avons la relation suivante

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

La définition d'un graphe est purement abstraite, sa représentation graphique habituelle à l'aide de points pour matérialiser les sommets et de segments pour matérialiser les arêtes est en fait une réalisation géométrique du graphe plongée dans le plan. A un même graphe, il est alors possible d'associer des réalisations géométriques différentes qui seront appelées des *cartes*.

**Définition 2.1.** Une *carte*  $M$  est un graphe  $\Gamma$  plongé dans une surface  $X$  (variété de dimension deux) de telle façon que



- les sommets sont représentés par des points distincts de la surface,
- les arêtes sont représentées par des courbes tracées sur la surface qui ne s'intersectent qu'aux sommets,
- si nous découpons la surface le long des arêtes du graphe  $\Gamma$  ainsi tracé sur  $X$ , ce qui restera (i.e. l'ensemble  $X \setminus \Gamma$ ) sera constitué d'une union disjointe de composantes connexes, appelées *faces*, toutes homéomorphes au disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Un tel plongement est appelé plongement cellulaire.

Cette construction est toujours possible, car il est possible de prouver que tout graphe fini peut se plonger dans une surface compacte orientée sans bord. Dans la suite, le vocable surface désignera exclusivement les surfaces compactes orientées. Une telle surface est définie à homéomorphisme près par un entier positif  $g$ , appelé le *genre* de la surface, tel que  $g = 0$  pour la sphère et  $g = n > 0$  pour une somme connexe de  $n$  tores (i.e. une surface ayant  $n$  « trous »).

Le genre de la carte  $M$  sera le genre de la surface  $X$  sous-jacente.

**Définition 2.2.** Deux graphes  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  sont *isomorphes* s'il existe deux bijections entre  $V_1$  et  $V_2$  et  $E_1$  et  $E_2$  respectivement, qui préservent les relations d'incidence.

Deux cartes  $M_1 \subset X_1$  et  $M_2 \subset X_2$  sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme préservant l'orientation  $f : X_1 \rightarrow X_2$  tel que la restriction de  $f$  à  $\Gamma_1$  est un isomorphisme de graphe entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

**2.2. Faces et formule d'Euler.** Une arête d'une carte sera dite incidente à une face si elle appartient à la frontière de celle-ci. L'orientation de la surface permet de définir un sens de parcours de l'arête et ainsi de donner un sens au bord gauche et au bord droit de l'arête (il suffit de considérer un voisinage tubulaire de l'arête). En général, les bords respectifs d'une arête appartiennent à deux faces différentes ; dans le cas contraire, l'arête sera appelée un *isthme*.

Le *degré*  $d(f)$  de la face  $f$  est le nombre d'arêtes incidentes à cette face, les isthmes étant comptés deux fois.

**Proposition 2.3.**  $\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|$  où la somme porte sur l'ensemble  $F$  des faces de la carte.

Faire un schéma

**Théorème 2.4** (Caractéristique d'Euler). Associons à chaque carte  $M$  le nombre entier

$$\chi(M) = |V| - |E| + |F|$$

qui est appelé sa *caractéristique d'Euler*. Alors  $\chi(M)$  ne dépend pas de la carte  $M$  elle-même mais seulement du genre  $g$  et  $\chi(M) = 2 - 2g$ .

Ce théorème découle directement du théorème de classification des surfaces (compactes orientables et sans bord). Notons que les isthmes ne contribuent pas à la caractéristique d'Euler, et que la suppression ou l'ajout d'un sommet, respectivement d'une arête ne modifie pas la valeur de  $\chi(M)$ . Par une succession de telles opérations il est alors possible d'obtenir une triangulation de la surface, donnant un moyen de calculer le genre de la surface.

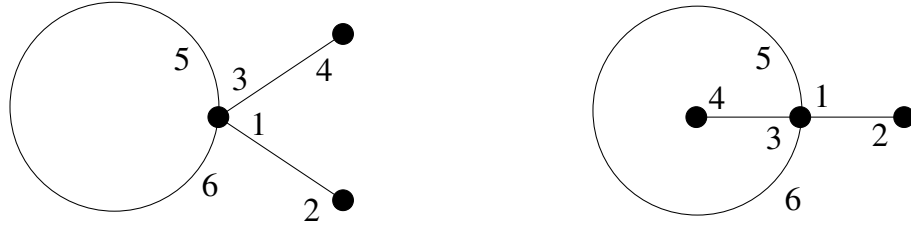


FIG. 3. Deux cartes pour un même graphe : étiquetage des brins.

Lorsque  $g = 0$ , la carte est dite planaire ainsi que le graphe tracé sur la sphère. Un théorème célèbre de Kuratowski caractérise les graphes planaires. Le genre d'un graphe est le plus petit genre que l'on puisse obtenir en le plongeant dans une surface. Bien entendu, il est possible d'obtenir une carte  $M$  d'un genre supérieur au genre du graphe sous-jacent. Construire une carte d'un genre  $g \geq 1$  à partir d'un graphe n'est pas une tâche aisée : par exemple comme de plonger le cube dans le tore de façon à obtenir 4 faces de degré 6 (pour le tore  $g = 1$ , d'où  $\chi(M) = 0 = 8 - 12 + F$ ).

**2.3. Cartes combinatoires.** Le but de cette section est d'exprimer une carte à l'aide de permutations. L'étoile  $\Gamma_v$  d'un sommet  $v$  du graphe  $\Gamma$  est le sous-graphe constitué du sommet  $v$  et des arêtes incidentes à ce sommet. Considérons un voisinage d'un sommet  $v$  d'une carte, suffisamment petit pour ne contenir qu'un plongement de l'étoile de  $v$ . Les « petits morceaux » d'arêtes incidentes à  $v$  seront appelés des *brins*. L'orientation de la surface définit un ordre cyclique sur les brins incidents à chaque sommets : que nous prendrons dans l'ordre contraire des aiguilles d'une montre. Désignons par  $B$  l'ensemble des brins ; sa taille étant le double du nombre d'arêtes. Nous avons ainsi construit sur  $B$  permutations cycliques  $c_1, \dots, c_{|V|}$  dont les supports forment une partition de  $B$ . Le produit  $c_1 \cdots c_{|V|}$  définit alors une permutation  $\sigma$  sur  $B$ .

Pour définir la carte, il nous faut une autre permutation  $\alpha$  pour d'écrire la structure du graphe sous-jacent, en associant par couple les brins pour former une arête. Ainsi  $\alpha$  se décomposera en autant de cycles de longueur 2 qu'il y a d'arêtes ; et par conséquent  $\alpha$  est une involution ( $\alpha^2 = id$ ) sans point fixe.

Considérons l'exemple de la figure 3 où les brins ont été numérotés selon la convention suivante. Si nous partons d'un sommet et parcourons un brin, nous écrirons l'étiquette du brin correspondant sur le côté gauche. Un brin sera alors dit incident à une face si son étiquette est à l'intérieur de la face.

La permutation  $\alpha$  est commune pour les deux cartes

$$\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$$

tandis que la permutation  $\sigma$  est pour la carte de gauche

$$\sigma = (1, 3, 5, 6)(2)(4)$$

et pour la carte de droite

$$\sigma = (1, 5, 3, 6)(2)(4).$$

Les faces sont maintenant représentées par une permutation  $\varphi$  sur l'ensemble des brins  $B$ , de telle façon qu'à chaque face corresponde le cycle des brins incidents et ordonnées dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Cette permutation se déduit des permutations  $\alpha$  et  $\sigma$  par la relation  $\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$ .

Pour les cartes de la figure 3, nous obtenons  $\varphi = (1, 2, 6, 3, 4)(5)$  pour la carte de gauche et  $\varphi = (1, 2, 6)(3, 4, 5)$  pour la carte de droite.

Remarquons que l'égalité  $\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$  peut s'écrire  $\varphi\alpha\sigma = id$ , exprimant une relation entre ces trois permutations.

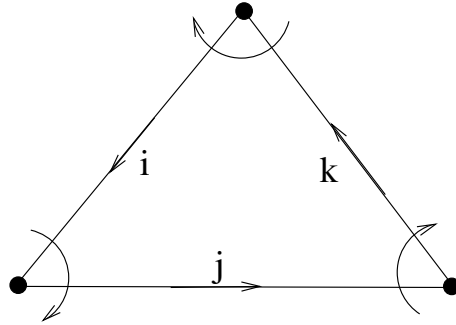


FIG. 4. Pour décrire une face dans le sens positif ; répéter  $\sigma^{-1}\alpha^{-1}$ .

Nous pouvons toujours nous ramener à l'étude des graphes connexes et des cartes construites à partir de ceux-ci. La connexité impose une condition supplémentaire aux trois permutations qui peut se traduire sous la forme suivante : le groupe  $G := \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$  engendré par les permutations  $\sigma$ ,  $\alpha$  et  $\varphi$  agit transitivement sur  $B$  (i.e. pour tout  $x, y \in B$  il existe  $g \in G$  tel que  $g \cdot x = y$ ).

Ces considérations nous amène à introduire la définition suivante :

**Définition 2.5** (Carte combinatoire). Une *carte combinatoire* est un triplet  $[\sigma, \alpha, \varphi]$  de permutations sur un ensemble  $B$  tel que :

- le groupe  $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$  agit transitivement sur  $B$ ,
- le produit des permutations est l'identité :  $\varphi\alpha\sigma = id$
- $\alpha$  est une involution sans point fixe.

Le groupe  $G$  est appelé le *groupe cartographique* de la carte.

Une carte combinatoire est également dénommée *graphe enrubanné* ; il suffit « d'élargir » les arêtes pour visualiser les deux brins la constituant comme étant les deux bords du ruban ainsi obtenu (cf. figure 5)

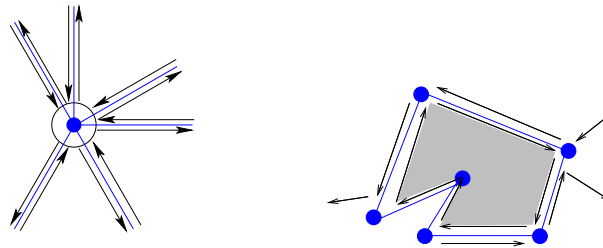


FIG. 5. Graphe enrubanné.

Après la construction d'une carte combinatoire à partir d'une carte, nous devons montrer comment construire une carte à partir d'une carte combinatoire. Une approche classique pour construire une surface consiste à recoller des polygones par identification des arêtes. La procédure peut être la suivante :

- (1) Associer à chaque cycle de  $\varphi$  de longueur  $m$  un polygone à  $m$  côtés, dont le bord est orienté dans le sens positif. Les arêtes du bord sont identifiés aux brins du cycle,
- (2) coller les polygones le long de leurs arêtes conformément à la permutation  $\alpha$ , et ceci en inversant les orientations des brins collés de telle façon à obtenir une surface orientée (penser à la triangulation d'une surface),

(3) à chaque sommet, les brins seront numérotés automatiquement conformément à la permutation  $\sigma = \alpha^{-1}\varphi^{-1}$ .

Il est alors relativement facile de vérifier que pour la surface ainsi construite, le voisinage de chaque point est homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

La correspondance entre cartes et cartes combinatoires peut s'établir de la façon suivante :

Un sommet d'une carte	un cycle de $\sigma$
Degré d'un sommet	longueur du cycle $\sigma$
Nombre de sommets	nombre de cycle de $\sigma$
Une arête	un cycle de $\alpha$
Nombre d'arêtes	nombre de cycle de $\alpha$
Une face	un cycle de $\varphi$
Degré d'une face	longueur du cycle de $\varphi$
Nombre de faces	nombre de cycle de $\varphi$ .

Notons par  $c(\sigma)$  le nombre de cycle d'une permutation  $\sigma$ , alors la caractéristique d'Euler d'une carte  $M$  s'exprime par la formule

$$\chi(M) = c(\sigma) - c(\alpha) + c(\varphi) = 2 - 2g.$$

*Remarque 2.6.* Etiqueter les brins dans le sens des aiguilles d'une montre transforme  $\sigma$  et  $\alpha$  en  $\sigma^{-1}$  et  $\alpha^{-1}$ . Il en découle que  $\varphi = \sigma\alpha$ , et les faces sont parcourues dans le sens direct. Comme nous le verrons ci-après, ce codage est souvent plus adapté aux formules obtenues.

**Définition 2.7** (Groupe d'automorphisme). Le groupe d'automorphisme d'une carte  $M$ , noté par  $\text{Aut}(M)$ , est le centralisateur de son groupe cartographique  $G$ , considéré comme sous-groupe du groupe des permutations  $S_n$  ( $n = \#B$ ). C'est donc l'ensemble des permutations qui commutent avec tous les éléments de  $G$ .

Il convient de remarquer que le codage d'une carte par des permutations introduit un étiquetage des arêtes. Par conséquent, à une même carte ou à des cartes isomorphes, il peut correspondre différentes cartes combinatoires obtenues par un autre choix d'étiquettes. Le groupe des automorphismes permet de tenir compte de ce problème ; en effet pour un choix arbitraire  $[\sigma, \alpha, \varphi]$  fixé, toute permutation qui commute avec  $\sigma$  et  $\alpha$  traduit un vrai automorphisme de groupe, indépendant d'une quelconque façon d'étiqueter la carte. En particulier, soit une permutation  $h \in S_n$ , et  $c = (i_1, \dots, i_r)$  un cycle, alors  $hch^{-1}$  est égal au cycle  $(h(i_1), \dots, h(i_r))$ . Par conséquent, si  $\sigma$  se décompose en le produit de cycles  $c_1 \cdots c_p$ , alors  $h\sigma h^{-1} = c'_1 \cdots c'_p$ , où les longueurs des cycles  $c'_i$  sont respectivement égales aux longueurs des cycles  $c_i$ . Ainsi, si l'action d'une permutation  $h \in \text{Aut}(M)$  change les étiquettes des brins sans modifier la structure du graphe.

Par exemple, la permutation  $h = (3, 4, 1, 2, 6, 5)$  appartient au groupe d'automorphisme de la carte de droite de la figure 3. La symétrie miroir qui consiste à conserver le même  $\alpha$  mais à remplacer  $\sigma$  par  $\sigma^{-1}$ , n'appartient pas au groupe d'automorphisme d'une carte.

Choisir un ordre cyclique quelconque sur les brins incidents à un sommet, ceci indépendamment sur chaque sommet, donnera toujours une carte. Le nombre de choix pour une arête de degré  $d$  est  $(d-1)!$  (il faut enraciner une arête), par conséquent le nombre possible de plongements d'un graphe de sommets de degrés respectifs  $d_1, \dots, d_m$  est donné par la formule

$$\prod_{i=1}^m (d_i - 1)!.$$

Bien entendu, beaucoup d'entre eux seront isomorphes.



**2.4. Collage des arêtes d'un polygone.** Une surface compacte orientée peut s'obtenir en recollant deux à deux les  $2n$  arêtes d'un polygone. Coller les arêtes  $iq$  et  $lk$  impose d'identifier les sommets de la façon suivante :  $i = k$  et  $q = l$  (cf. figure 6). De même, nous devons imposer les relations :  $j = p, i = q, j = p, k = l$ . Nous obtenons un graphe plongé dans la surface ainsi obtenue ; il possède 2 sommets, 3 arêtes et 1 face, d'où sa caractéristique d'Euler  $2 - 2g = 2 - 3 + 1 = 0$  et donc la surface est un tore.

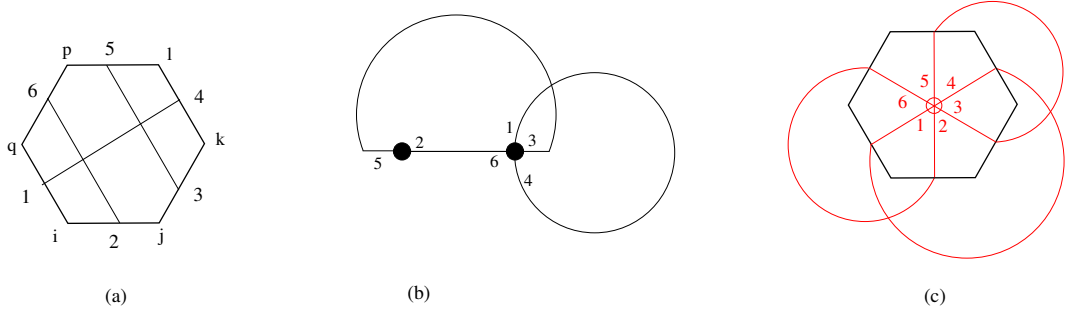


FIG. 6. Collage d'un hexagone (a) et carte combinatoire associée (b) :  $\alpha = (14)(26)(35)$ ,  $\varphi = (165432)$ ,  $\sigma = \alpha\varphi^{-1} = (1643)(25)$  et (c) carte duale.

La carte combinatoire du graphe plongé dans le tore s'obtient à partir de l'appariement des arêtes qui fournit la permutation  $\alpha$  et de la permutation  $\varphi$  associée à la face ;  $\varphi$  est choisie de telle façon que  $\varphi^{-1}$  soit la permutation cyclique  $c = (1, 2, \dots, 2n)$ . La permutation  $\sigma$  se déduit de la relation  $\sigma = \alpha^{-1}\varphi^{-1} = \alpha c$ . Nous aurions pu choisir une carte avec un seul sommet et donc deux faces sans changement de la caractéristique d'Euler. Cela revient à choisir la carte duale  $(\varphi^{-1}, \alpha^{-1}, \sigma^{-1}) = (c, \alpha, \sigma^{-1})$ .

Le genre de la sphère étant  $g = 0$ , les cartes de genre  $g = 0$ , dites planes, avec  $n$  arêtes et une face auront  $n + 1$  sommets ; ce sont donc des arbres. Pour un genre non nul, les cartes à  $n$  arêtes et une face auront  $n + 1 - 2g$  sommets.

**2.5. Hypercartes.** Nous pouvons généraliser la notion de cartes combinatoires en supprimant la condition d'involution sans point fixe imposée à la permutation  $\alpha$  ; nous obtenons ainsi la définition suivante.

**Définition 2.8.** Une *hypercarte* est un triplet  $[\sigma, \alpha, \varphi]$  de permutations sur un ensemble  $B$  tel que :

- le groupe  $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$  agit transitivement sur  $B$ ,
- le produit des permutations est l'identité :  $\varphi\alpha\sigma = id$

Le groupe  $G$  est appelé le *groupe cartographique* de l'hypercarte.

Soit  $n$  le nombre de brins, la décomposition en  $p$  cycles d'une permutation  $g \in S_n$  correspond à une partition  $\lambda \vdash n$  de  $n$  obtenue en considérant la longueur des  $p$  cycles. Nous noterons souvent  $\lambda$  sous la forme  $\lambda = (1^{d_1}2^{d_2} \dots n^{d_n})$  où  $d_i$  est le nombre de cycles de longueur  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^n d_i = p, \quad \sum_{i=1}^n i d_i = n.$$

Par exemple, si  $n = 12$  et  $g = (1, 3, 5, 7)(2, 4, 6)(8, 9, 12)$ , alors  $g$  contient un cycle de longueur 4, deux cycles de longueur 3 et deux cycles de longueur 1, d'où la partition associée est  $(1^23^24)$ .

Etant donnée une hypercarte, la séquence  $[\lambda, \mu, \nu]$  des partitions de  $n$  correspondant respectivement aux permutations  $\sigma, \alpha, \varphi$  est appelée le *passerport* de l'hypercarte.

Il est difficile de se représenter une hypercarte, mais une approche équivalente utilise la notion de graphe *bipartite*, un graphe dont les sommets peuvent être colorés avec deux couleurs, par ex. blanc et noir, de sorte que chaque arête relie des sommets de couleurs différentes.

Comment procéder pour transformer une hypercarte en une carte bicolorée ? Colorions tout d'abord les sommets de l'hypercarte en noir, puis subdivisons chaque arête en insérant un sommet blanc au milieu de chaque arête, obtenant ainsi une carte bicolorée. Le nombre d'arêtes est alors multiplié par 2, car les brins de la carte d'origine deviennent les arêtes de la carte bicolorée. La carte bicolorée est décrite par le même triplet de permutations  $[\sigma, \alpha, \varphi]$  mais agissant sur les arêtes et non plus sur les brins. La permutation  $\sigma$  code la rotation des arêtes autour des sommets noirs, et la permutation  $\alpha$  fait de même pour les sommets blancs. Pour les faces, pour rester cohérent avec les définitions précédentes, nous devons déclarer une arête comme incidente à une face si, se déplaçant à l'intérieur de la face le long de l'arête dans la direction positive, nous nous déplaçons d'un sommet noir vers un sommet blanc ; ainsi les arêtes sont orientées des sommets noirs vers les blancs.

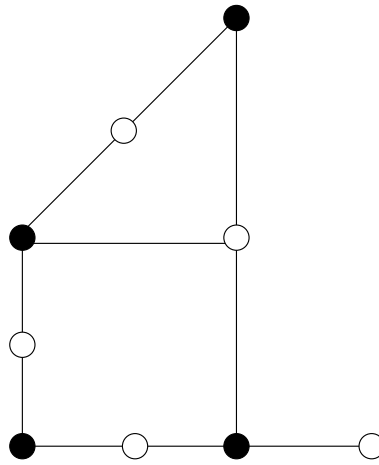


FIG. 7. Un exemple d'hypercarte de passeport  $[2^23^2, 12^33, 235]$ .

Une définition équivalente à une hypercarte est donc la suivante :

**Définition 2.9.** Une hypercarte est une carte dont les sommets sont colorés en noir et blanc de telle façon que chaque arête relie deux sommets de couleurs différentes.

**Proposition 2.10.** Soit  $H$  une hypercarte ayant  $n$  arêtes. Sa caractéristique d'Euler est donnée par la formule

$$\chi(H) = c(\sigma) + c(\alpha) + c(\varphi) - n = 2 - 2g.$$

En effet, le nombre de sommets est égal à  $c(\sigma) + c(\alpha)$ , le nombre d'arêtes est égal à  $n$  et le nombre de faces est égal à  $c(\varphi)$ .

**Définition 2.11** (Hypercarte enracinée). Une *hypercarte enracinée* est une hypercarte dont une arête est distinguée : celle-ci étant appelée la *racine*. Lors de l'étiquetage de l'hypercarte nous associerons toujours à la racine l'étiquette 1.

L'introduction des hypercartes enracinées permet de supprimer les symétries lors du dénombrement des hypercartes. En effet, le groupe des automorphismes d'une hypercarte enracinée est toujours trivial, puisque par définition tout  $h \in \text{Aut}(H)$  doit envoyer l'arête 1 sur l'arête 1. Ainsi,  $h$  ne modifie ni le cycle associé au sommet d'origine de la racine, ni celui associé au sommet final, et par transitivité de l'action des permutations cette absence de modification se propage à tous les cycles.

**2.6. Hypercartes colorées.** Nous avons vu qu'une hypercarte peut s'interpréter comme une carte bicolorée pour laquelle l'ensemble des sommets  $V$  se partitionne en deux sous ensembles disjoints  $V_0$  et  $V_1$  (les sommets noirs et les sommets blancs) tels que les arêtes joignent les sommets noirs aux sommets blancs. Nous pouvons étendre cette notion de coloration en considérant un ensemble de couleurs  $\{1, \dots, s\}$  et une hypercarte colorée sera une carte bipartie colorée construite de la façon suivante : l'ensemble des sommets  $V$  se partitionne en deux sous ensembles disjoints  $V_0$  (les sommets noirs) et  $V_c = \cup_{j=1}^s V_j$  (les sommets colorés) et les arêtes  $\{1, \dots, n\}$  sont colorées par une application  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  de façon à ce qu'une arête  $i$  soit orientée d'un sommet noir vers un sommet de couleur  $t(i)$ . La figure 8 donne un exemple d'hypercarte colorée.

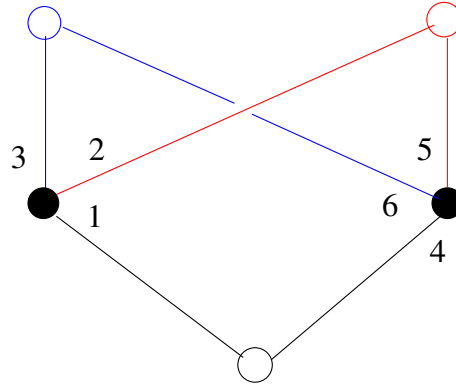


FIG. 8. Exemple d'hypercarte colorée :  $\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$ ,  $\alpha = (1, 4)(2, 5)(3, 6)$  et  $\varphi = (1, 6, 2, 4, 3, 5)$  (les arêtes parcourues d'un sommet coloré vers un sommet noir ne sont pas prises en compte)

Formellement, une hypercarte à  $n$  arêtes colorée par une fonction  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ , correspond à la donnée d'une permutation  $\sigma \in S_n$  et d'une permutation  $\alpha \in S_n$  qui préservent les couleurs, i.e.  $t = t \circ \alpha$ . Notons  $S_n(t)$  le sous-groupe des permutations laissant invariant la coloration  $t$ ,

$$S_n(t) = \{\sigma \in S_n : t = t \circ \sigma\}.$$

Toute permutation  $\alpha \in S_n(t)$  se décompose en un  $k$ -uplets de permutations sur les  $k$  ensembles non vides  $t^{-1}(1), \dots, t^{-1}(s)$ . En particulier, l'ensemble des cycles  $C(\alpha)$  de  $\alpha$  se partitionne en  $s$  ensembles disjoints  $C(\alpha) = \cup_{i=1}^s C_j(\alpha)$ , où  $C_j(\alpha)$  est l'ensemble des cycles sur  $t^{-1}(j)$ , avec la convention  $C_j(\alpha) = \emptyset$  si  $t^{-1}(j) = \emptyset$ . Nous pouvons également supposer  $t$  surjective pour simplifier les notations.

Ainsi, dans une hypercarte colorée, les cycles de  $\sigma$  codent les sommets noirs et les cycles de  $\alpha$  les sommets colorés. Comme  $\alpha$  correspond à  $s$  permutations  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , il y aura autant de sommets d'une couleur  $i$  qu'il aura de cycles dans la décomposition de la permutation  $\alpha_i$ . D'autre part, une arête  $(j, \alpha_i(j))$  orientée d'un sommet noir vers un sommet de couleur  $i$  sera de couleur  $i$ ,  $(t(\alpha_i(j)) = t(j) = i)$ . Les faces de l'hypercarte sont codées par la permutation  $\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$  et nous supposons que le groupe  $G$  engendré par  $\sigma$  et  $\alpha$  agit transitivement sur  $\{1, \dots, n\}$ .

**2.7. Hypercartes colorées et monômes non commutatifs.** Soient  $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_s \rangle$  des monômes en les variables non commutatives  $x_1, \dots, x_s$  (ex :  $q_1 = x_1 x_2^2 x_1$ ), de degrés respectifs  $n_1, \dots, n_m$ . L'entier  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$  correspond au degré du monôme  $q_1 q_2 \dots q_m$ .

Associons au monôme  $Q(x_1, \dots, x_s) := q_1 \dots q_m$  une application  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  telle que  $t(i)$  soit égale à l'indice de la  $i$ -ième variable dans le monôme  $Q$ . Ainsi,  $Q(x_1, \dots, x_s) = \prod_{i=1}^n x_{t(i)}$ .

Remarquons que pour tout  $\alpha \in S_n(t)$ ,

$$Q(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(s)}) = \prod_{i=1}^n x_{t(\alpha(i))} = \prod_{i=1}^n x_{t(i)} = Q(x_1, \dots, x_s),$$

c'est à dire que  $Q$  est invariant par l'action de  $S_n(t)$ .

Considérons la permutation  $\sigma \in S_n$  définie

$$\sigma = (1, \dots, n_1)(n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \cdots (n_1 + \dots + n_{m-1} + 1, \dots, n),$$

et une permutation  $\alpha \in S_n(t)$ , telle que  $\langle \sigma, \alpha \rangle$  agisse transitivement sur  $\{1, \dots, n\}$ . Nous obtenons ainsi une hypercarte  $H(q_1, \dots, q_m)$  colorée par la fonction  $t$  associée au monôme  $Q$ . Sa structure est la suivante :

- $m$  sommets noirs de degrés respectifs  $n_1, \dots, n_m$ , aussi appelés étoiles de type  $q_j$ ,
  - $n$  arêtes orientées d'un sommet noir vers un sommet de même couleur,
  - des sommets colorés dont le nombre et les degrés respectifs dépendent de la permutation  $\alpha \in S_n(t)$ .
- L'hypercarte de la figure 8 peut être vu comme une hypercarte  $H(q_1, q_2)$  associée aux monômes  $q_1 = q_2 = x_1 x_2 x_3$ .

De même, étant donnée une hypercarte à  $m$  sommets noirs,  $n$  arêtes et de coloration  $t$ , il est possible, après changement d'étiquettes, d'associer à chaque sommet noir un monôme non commutatif.

Elargissons la construction précédente de la façon suivante. Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ ; considérons le monôme  $Q = q_1^{k_1} \cdots q_m^{k_m}$  obtenus à partir des monômes  $q_j$  de degrés respectifs  $n_j$ . Le degré de  $Q$  est  $n_{\mathbf{k}} = k_1 n_1 + \dots + k_m n_m$  et la coloration associée est notée  $t_{\mathbf{k}}$ . Notons  $\mathcal{H}(g, \mathbf{k})$  l'ensemble des hypercartes de genre  $g$  possédant  $k_j$  étoiles de type  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  et remarquons que toutes les hypercartes de l'ensemble  $\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \bigcup_{g \geq 0} \mathcal{H}(g, \mathbf{k})$  partagent la même permutation  $\sigma = \sigma_{\mathbf{k}}$  et la même coloration  $t_{\mathbf{k}}$ , seules diffèrent les permutations  $\alpha$ . La structure d'une hypercarte de  $\mathcal{H}(g, \mathbf{k})$  sera la suivante :

- $n = k_1 + \dots + k_m$  sommets noirs composés de  $k_1$  étoiles de type  $q_1$ ,  $k_2$  étoiles de type  $q_2$ , etc.,
- $n_{\mathbf{k}}$  arêtes orientées d'un sommet noir vers un sommet de même couleur,
- des sommets colorés dont le nombre  $c(\alpha)$  et les degrés respectifs dépendent de la permutation  $\alpha \in S_n(t)$ ,
- le nombre de faces  $c(\varphi)$  et le nombre de sommets colorés  $c(\alpha)$  sont reliés par l'identité  $2 - 2g = n + c(\alpha) + c(\varphi) - n_{\mathbf{k}}$ .

Jusqu'à présent nous avons seulement considéré des hypercartes connexes (par construction), mais nous aurons besoin dans la suite de considérer des collections disjointes d'hypercartes. Plus précisément, pour  $n_{\mathbf{k}}$  fixé, le groupe cartographique  $G$ , engendré par  $\sigma$  et  $\alpha$ , n'agira plus transitivement sur les arêtes. Nous pouvons alors décomposer  $\{1, \dots, n_{\mathbf{k}}\}$  en orbites, mais comme les arêtes de chaque étoile de type  $q_j$  appartiennent nécessairement à la même orbite, il y aura au plus  $n = k_1 + \dots + k_m$  orbites ( $n$  étant le nombre de sommets), chacune d'elles correspondant à une hypercarte (connexe).

Les orbites sont déterminées par la procédure suivante (Bryc 2008) :

- Fixer la séquence des  $n$  monômes

$$(5) \quad (Q_1, \dots, Q_n) = (\underbrace{q_1, \dots, q_1}_{k_1}, \underbrace{q_2, \dots, q_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{q_m, \dots, q_m}_{k_m}),$$

- choisir une partition  $\mathcal{V} = \{B_1, \dots, B_v\}$  de  $\{1, \dots, n\}$ ; chacun des blocs  $B_i$  énumérant les sommets des composantes connexes. La permutation  $\sigma$  est alors uniquement déterminée par les permutations  $\sigma_B$  des arêtes des sommets appartenant au bloc  $B$ ,
- choisir une permutation  $\alpha \in S_{n_{\mathbf{k}}}(t)$  qui connecte les étoiles dans chaque bloc. Une telle permutation sera ainsi une séquence de permutations préservant les couleurs  $\alpha_B$  agissant sur les arêtes des étoiles du bloc  $B \in \mathcal{V}$  et telle que  $\langle \sigma_B, \alpha_B \rangle$  agisse transitivement sur les arêtes des étoiles de  $B$ .

Pour  $B \subset \{1, \dots, n\}$ , nous désignerons par  $\mathcal{H}(B)$  l'ensemble des hypercartes construites à partir des étoiles de types  $\{Q_j : j \in B\}$  prises dans l'ordre des positions dans (5), et par  $S_B^T(t)$  l'ensemble des permutations des arêtes des étoiles du bloc  $B$  et préservant la coloration  $t$  et telles que  $\langle \sigma_B, \alpha_B \rangle$  agisse transitivement.

Ainsi, l'ensemble des structures combinatoires construites à partir des  $k_i$  étoiles de type  $q_i$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , et de la permutation  $\sigma$  est-il constitué d'objets admettant une unique décomposition en une union disjointe d'objets connexes, les hypercartes. La formule exponentielle s'appliquera.

### 3. DÉNOMBREMENT DES HYPERCARTES ET MATRICES ALÉATOIRES

Les matrices aléatoires gaussiennes permettent de dénombrer certains types de cartes combinatoires étiquetés, principalement en raison du théorème de Wick qui transforme le calcul d'une intégrale en un calcul purement algébrique. Plusieurs subtilités interviennent dans ces dénombrements : la connexité des graphes et l'action de groupe d'automorphisme des graphes. Ce dernier peut être supprimé en enracinant la carte, à condition que les paramètres intervenant dans la combinatoire soient constant sur les orbites du groupe. La gestion de la connexité fait appel à la formule exponentielle ou aux cumulants.

Soient  $X_1, \dots, X_s$  des matrices aléatoires  $N \times N$  indépendantes. Considérons l'expression

$$\prod_{i=1}^m \text{tr}^{k_j} (q_j(X_1, \dots, X_s))$$

obtenues en remplaçant les variables  $x_i$  par les matrices  $X_i$  dans les monômes  $q_j$ . La coloration  $t_{\mathbf{k}}$  et la permutation  $\sigma$  associées au monôme  $q_1^{k_1} \dots q_m^{k_m}$  permettent d'écrire cette quantité sous la forme

$$\prod_{c \in C(\sigma)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} X_{t_{\mathbf{k}}(j)} \right).$$

De façon générale, pour toute permutation  $\sigma \in S_n$  et toute coloration  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ , nous poserons

$$q_{\sigma,t}(X_1, \dots, X_s) = \prod_{c \in C(\sigma)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} X_{t(j)} \right).$$

Pour certains types de matrices aléatoires, le calcul de l'espérance de ce type d'expression permet de dénombrer des familles d'éléments de  $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ .

**Exemple 3.1** (Cas du GUE). Si  $H_1, \dots, H_s$  sont des matrices du GUE, alors

$$\mathbb{E}[q_{\sigma,t}(H_1, \dots, H_s)] = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{n_{\mathbf{k}}}(t_{\mathbf{k}})} N^{c(\sigma\alpha)},$$

où  $\mathcal{I}_{n_{\mathbf{k}}}(t_{\mathbf{k}})$  est l'ensemble des involutions sans point fixe qui préservent la coloration. Remarquons que la condition sur  $\alpha$  impose à  $n_{\mathbf{k}}$  d'être pair. Posons  $A_i = H_i/\sqrt{N}$ ,

$$N^{c(\sigma)} \mathbb{E}[q_{\sigma,t}(A_1, \dots, A_s)] = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{n_{\mathbf{k}}}(t_{\mathbf{k}})} N^{c(\sigma) + c(\sigma\alpha) - n_{\mathbf{k}}/2}.$$

Or  $\alpha$  étant une involution sans point fixe,  $c(\alpha) = n_{\mathbf{k}}/2$ , d'où l'expression

$$N^{c(\sigma)} \mathbb{E}[q_{\sigma,t}(A_1, \dots, A_s)] = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{n_{\mathbf{k}}}(t_{\mathbf{k}})} N^{\chi(\sigma,\alpha)}.$$

En utilisant la procédure précédente, nous aboutissons à

$$(6) \quad N^{c(\sigma)} \mathbb{E}[q_{\sigma,t}(A_1, \dots, A_s)] = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} \prod_{B \in \mathcal{V}} \sum_{H \in \mathcal{M}(B)} N^{2-2g(H)},$$

où  $\mathcal{M}(B)$  est l'ensemble des cartes construites à partir des étoiles dans  $B$ .

Noter que la dernière expression découle de la propriété multiplicative de la fonction  $F(H) = N^{\chi(\sigma, \alpha)}$ . Plus précisément, si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux hypercartes, alors pour l'objet  $H_1 + H_2$ , union des deux hypercartes,  $F(H_1 + H_2) = F(H_1)F(H_2)$ .

**3.1. Séries formelles et cumulants.** Considérons l'intégrale

$$Z_N(u_1, \dots, u_m) := \mathbb{E} \left( e^{-NV_u(X_1, \dots, X_s)} \right),$$

où

$$V_u(X_1, \dots, X_s) = \sum_{i=1}^m u_i \text{tr}(q_i(X_1, \dots, X_s)).$$

Nous utiliserons les notations classiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (k_1, \dots, k_m), \quad k_i \in \mathbb{N}, \\ |\mathbf{k}| &= k_1 + k_2 + \dots + k_m, \\ \mathbf{k}! &= k_1! \times \dots \times k_m!, \\ \mathbf{u}^{\mathbf{k}} &= u_1^{k_1} \dots u_m^{k_m}. \end{aligned}$$

Dans l'algèbre des séries formelles  $\mathbb{C}[[u_1, \dots, u_m]]$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_N(\mathbf{u}) &= 1 + \sum_{|\mathbf{k}| > 0} \frac{(-\mathbf{u})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} N^{|\mathbf{k}|} \mathbb{E}(q_{\sigma, t_{\mathbf{k}}}(X_1, \dots, X_s)), \\ &:= 1 + \sum_{|\mathbf{k}| > 0} \frac{(-\mathbf{u})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} M_{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

où nous avons remplacé  $Z_N$  par  $\tilde{Z}_N$  pour bien marquer le caractère formel de cette série. Les  $M_{\mathbf{k}}$  sont les moments des variables aléatoires  $\xi_i = N \text{tr}(q_i(X_1, \dots, X_s))$ .

Exprimons la série formelle associée à  $\widetilde{\log Z_N}$  sous la forme

$$\widetilde{\log Z_N}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{k}| > 0} \frac{(-\mathbf{u})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} c_{\mathbf{k}},$$

où les  $c_{\mathbf{k}}$  sont les cumulants. La relation entre les moments et les cumulants est la suivante :

$$(7) \quad M_{\mathbf{k}} = \sum_{n=1}^{|\mathbf{k}|} \frac{1}{k!} \sum_{\beta^1 + \dots + \beta^n = \mathbf{k}, |\beta^i| > 0} \frac{\mathbf{k}!}{\beta^1! \dots \beta^n!} \prod_{i=1}^n c_{\beta^i}.$$

Les  $\beta^i$  sont aussi des multi-indices, et la somme intérieure est prise sur tous les  $k$ -uplets ordonnées de multi-indices. Nous utiliserons une forme équivalente (Speed, 1983). Soient  $\mathcal{V} = \{B_1, \dots, B_v\} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]$  une partition de  $\{1, \dots, n\}$ , et  $n = k_1 + \dots + k_m$ . Posons

$$(X_1, \dots, X_n) = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{k_1}, \underbrace{\xi_2, \dots, \xi_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{\xi_m, \dots, \xi_m}_{k_m}).$$

A chaque  $B \subset \{1, \dots, n\}$  non vide, nous associons le cumulants  $c_B := c_{j_1, \dots, j_m}$ , avec  $j_r = \#\{u \in B : X_u = \xi_r\}$  pour  $1 \leq r \leq m$ . En particulier,  $c_k = c_B$  avec  $B = \{1, \dots, n\}$ . Alors, (7) est équivalent à

$$(8) \quad M_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} \prod_{B \in \mathcal{V}} c_B.$$

Par exemple, pour  $m = 2$  et  $(k_1, k_2) = (1, 1)$ , nous avons  $c_{\{1\}} = c_{1,0} = \mathbb{E}(\xi_1)$ ,  $c_{\{2\}} = c_{0,1} = \mathbb{E}(\xi_2)$ , et  $c_{\{1,2\}} = c_{1,1} = \text{Cov}(\xi_1, \xi_2)$ , d'où la relation classique

$$M_{1,1} = \mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) = c_{1,0} c_{0,1} + c_{1,1}.$$

Lorsque  $m = 1$ , les cumulants s'expriment simplement par  $c_B = \#B$ , d'où

$$M_n = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} \prod_{B \in \mathcal{V}} \#B.$$

Le lien entre la série génératrice exponentielle des  $M_n$  et celle des  $c_k$  est un cas particulier de la formule exponentielle connue en combinatoire. Le contexte est le suivant (Stanley, 1999). Une série génératrice exponentielle des coefficients  $f(n)$  est par définition la série formelle

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}.$$

**Théorème 3.2** (Formule de composition). *Soient des fonctions  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $f(0) = 0$ . Définissons une nouvelle fonction  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  par*

$$h(n) = \sum_{\mathcal{V} = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k) g(k), \quad n > 0,$$

$$h(0) = g(0),$$

alors

$$E_h(x) = E_g(E_f(x)).$$

Ce théorème s'interprète de la façon suivante. Plusieurs structures sur un ensemble, telles que les graphes ou les posets, peuvent être vues comme des unions disjointes de leurs composantes connexes. En outre, une structure additionnelle peut être plaquée sur les composantes. S'il y a  $f(j)$  composantes connexes sur un ensemble de taille  $j$  et  $g(k)$  façon de plaquer une structure additionnelle sur  $k$  composantes, alors  $h(n)$  est le nombre total de structures sur un ensemble de taille  $n$ .

L'utilisation la plus commune est le cas  $g(n) = 1$  pour tout  $n$ , elle correspond à l'absence de structure supplémentaire.

**Corollaire 3.3** (Formule exponentielle). *Etant donnée une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(0) = 0$ , définissons une nouvelle fonction  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  par*

$$h(n) = \sum_{\mathcal{V} = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k), \quad n > 0,$$

$$h(0) = 1,$$

alors

$$E_h(x) = \exp E_f(x).$$

Il existe également une version en termes de permutations qui est la suivante :

**Corollaire 3.4.** Soient des fonctions  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $f(0) = 0$ . Définissons une nouvelle fonction  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$h(n) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\#C_1) \cdots f(\#C_k) g(k), \quad n > 0,$$

$$h(0) = g(0),$$

où  $C_1, \dots, C_k$  sont les cycles de la décomposition en cycles disjoints de  $\sigma$ . Alors

$$E_h(x) = E_g \left( \sum_{n \geq 1} f(n) \frac{x^n}{n} \right).$$

L'expression (8) appliquée à la formule (6) de l'exemple précédent conduit à la proposition suivante

**Proposition 3.5.** Soient  $H_1, \dots, H_s$  sont des matrices indépendantes du  $GUE(N)$  et soient  $q_1, \dots, q_m$  des monômes. Posons

$$Z_N(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left( \exp \left( -N \sum_{i=1}^m u_i \operatorname{tr} (q_i(A_1, \dots, A_s)) \right) \right),$$

avec  $A_i = H_i / \sqrt{N}$ . Alors

$$(9) \quad \widetilde{\log Z_N(\mathbf{u})} = \sum_{g \geq 0} \frac{1}{N^{2g-2}} \sum_{k_1 + \dots + k_m \geq 1} \frac{(-\mathbf{u}^{\mathbf{k}})}{\mathbf{k}!} \#\mathcal{M}(g, \mathbf{k}),$$

où  $\mathcal{M}(g, \mathbf{k})$  est l'ensemble des cartes de genre  $g$  avec  $k_i$  étoiles de types  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

*Remarque 3.6.* Les cartes intervenant dans (9) sont celles obtenues à partir de la construction décrite précédemment; elles sont donc étiquetées et enracinées sur la première étoile de type  $q_1$ . Si seul les classes d'isomorphismes de cartes non étiquetées et non enracinées nous intéresse, il faut introduire le groupe  $\operatorname{Aut}(\Gamma)$  et l'action des permutations des étiquettes. Ceci conduit à la formule, classique en physique, suivante (en considérant une limite inductive sur  $m$ )

$$\begin{aligned} Z_N(g_1, g_2, \dots) &= \mathbb{E} \left( e^{-N \sum_{i \geq 1} \frac{g_i}{i} \operatorname{tr}(H^i)} \right), \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots \geq 0} \prod_{i \geq 1} \frac{(N g_i)^{k_i}}{i^{k_i} k_i!} \sum_{\text{cartes } \Gamma \text{ avec } k_i \text{ étoiles de degré } i} N^{-E(\Gamma) + F(\Gamma)}, \\ &= \sum_{\text{cartes } \Gamma} \frac{N^{\chi(\Gamma)}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|} \prod_{i \geq 1} g_i^{k_i(\Gamma)}, \\ \log Z_N(g_1, g_2, \dots) &= \sum_{\text{cartes connexes } \Gamma} \frac{N^{2-2g(\Gamma)}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|} \prod_{i \geq 1} g_i^{k_i(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Le cas particulier  $g_3 = g \neq 0$ , tandis que les autres  $g_i = 0$ , correspond à des sommets de degré trois, donc à une triangulation  $T$  de la surface de genre  $g(\Gamma)$ . Supposons que l'aire de chaque triangle soit égal à l'unité, alors  $k_3(\Gamma) = A(T)$  est simplement l'aire totale de la triangulation  $T$ . Ainsi

$$\log Z_N(g_1, g_2, \dots) = \sum_{\text{triangulations connexes } T} \frac{g^{A(T)} N^{2-2g(\Gamma)}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}.$$



**3.2. Matrices de Wishart.** Une matrice hermitienne aléatoire  $W$ , de taille  $N \times N$ , sera appelée *matrice de Wishart* de paramètre de forme  $p \in \{1, 2, \dots, N\} \cup (N, \infty)$  et de paramètre d'échelle une matrice hermitienne  $\Sigma$ , de taille  $N \times N$ , définie positive si sa transformée de Laplace est égale à

$$\mathbb{E}(\exp(\text{tr}(\theta W))) = (\det(I - \theta \Sigma))^{-p}$$

pour toute matrice hermitienne  $\theta$  telle que  $\Sigma^{-1} - \theta$  soit définie positive. Nous écrivons  $W \in \mathcal{W}_N(\Sigma, p)$ , et désignerons par  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices  $N \times N$  sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

Pour obtenir une matrice de Wishart il suffit de se donner une matrice aléatoire  $X_r$  de taille  $p \times N$ , dont les entrées  $[X_r]_{ij}$  sont des variables complexes gaussiennes telles que

$$(10) \quad \mathbb{E}([X_r]_{ij}) = \mathbb{E}([X_r]_{ij}^2) = 0, \quad \mathbb{E}(|[X_r]_{ij}|^2) = 1.$$

et une matrice hermitienne définie positive  $\Sigma$  se factorisant sous la forme  $\Sigma_r = AA^*$ . Alors la matrice  $W = A^*X^*XA \in \mathcal{W}_N(\Sigma, p)$ .

Etant données une permutation  $\sigma \in S_n$ , une coloration  $t : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  et une fonction  $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , nous considérons les quantités

$$q_{\sigma, t, h}(X_1, \dots, X_s) = \prod_{c \in C(\sigma)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} h(j) X_{t(j)} \right),$$

où  $X_1, \dots, X_s$  sont des matrices  $N \times N$ .

Le théorème suivant, démontré dans l'article de W. Bryc, fournit une remarquable identité.

**Théorème 3.7.** *Si  $W_1 \in \mathcal{W}_N(\Sigma_1, p_1), \dots, W_s \in \mathcal{W}_N(\Sigma_s, p_s)$  sont indépendantes et  $\sigma \in S_n$ , alors*

$$(11) \quad \mathbb{E}(q_{\sigma, t, h}(W_1, \dots, W_s)) = \sum_{\alpha \in S_n(t)} p_1^{\#C_1(\alpha)} \dots p_s^{\#C_s(\alpha)} q_{\sigma, \alpha, t, h}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_s).$$

La formule (11) permet de retrouver diverses expressions obtenues par différents auteurs.

– Dans (Graczyk & al., 2003) théorème 2 : pour  $\pi \in S_n$  et  $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{M}_N$ , définissons

$$r_\pi(Xh_1, \dots, Xh_n) = \prod_{c \in C(\pi)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} Xh_j \right).$$

Si  $W \in \mathcal{W}(\Sigma, p)$ , alors

$$\mathbb{E}(r_{\pi_0}(Wh_1, \dots, Wh_n)) = \sum_{\pi_1} p^{\#C(\pi_1^{-1}\pi_0)} r_{\pi_1}(\Sigma h_1, \dots, \Sigma h_n).$$

– (Hanlon & al., 1992) corollaire 2.4 : pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$ , soit  $p_\lambda(\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{x}^{\lambda_1}) \text{tr}(\mathbf{x}^{\lambda_2}) \dots$ .

Si  $W \in \mathcal{W}(I, p)$  et  $\sigma \in S_n$  a une décomposition en cycles de type  $\lambda$ , alors

$$\mathbb{E}(p_\lambda(W)) = \sum_{\alpha \in S_n} p^{\#C(\alpha)} N^{\#C(\alpha\sigma)}.$$

– (Mingo & al., 2004) lemme 9.1 : Si  $W_1, \dots, W_s \in \mathcal{W}_N(I, p)$  sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(q_{\sigma, t, I}(W_1, \dots, W_s)) = \sum_{\alpha \in S_n(t)} p^{\#C(\alpha)} N^{\#C(\alpha^{-1}\sigma)}.$$

Comme dans le cas du GUE, étant données des monômes non commutatifs  $q_1, \dots, q_m$  en les variables  $x_1, \dots, x_s$ , nous considérons la série formelle

$$\tilde{Z}_N(\mathbf{u}) = 1 + \sum_{|\mathbf{k}| \geq 1} \frac{(-\mathbf{u})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} N^{|\mathbf{k}|} \mathbb{E}(q_{\sigma, t_{\mathbf{k}}, Id}(W_1, \dots, W_s)),$$

où les  $W_i \in \mathcal{W}(\frac{1}{N}\Sigma_i, Np_i)$  sont des matrices de Wishart indépendantes.

La formule (11) permet d'obtenir l'expression suivante des moments

$$N^{|\mathbf{k}|} M_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}[1, \dots, n]} \prod_{B \in \mathcal{V}} \sum_{H=(V,E,F) \in \mathcal{H}(B)} N^{2-2g(H)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#V_r} \prod_{f \in F} \text{tr}_N \Sigma^{f,t},$$

où  $V_r \subset V$  est le sous-ensemble des sommets de couleurs  $r$  de  $V$  et si  $f$  est une face correspondant au cycle  $c = (j_1, \dots, j_k)$  de  $\sigma_\alpha$ , alors

$$\text{tr}_N \Sigma^{f,t} := \frac{1}{N} \text{tr}(\Sigma_{t(j_1)}, \dots, \Sigma_{t(j_k)}).$$

Nous obtenons le théorème suivant (Bryc 2008)

**Théorème 3.8.** *Si  $W_1 \in \mathcal{W}(\frac{1}{N}\Sigma_1, Np_1), \dots, W_s \in \mathcal{W}(\frac{1}{N}\Sigma_s, Np_s)$  sont indépendantes, alors*

$$\widetilde{\log Z_N(\mathbf{u})} = \sum_{g \geq 0} \frac{1}{N^{2g-2}} \sum_{k_1 + \dots + k_m \geq 1} \frac{(-\mathbf{u}^{\mathbf{k}})}{\mathbf{k}!} c(\mathbf{k}, g, \Sigma),$$

où

$$(12) \quad c(\mathbf{k}, g, \Sigma) = \sum_{H \in \mathcal{H}(g, \mathbf{k})} \prod_{r=1}^s p_r^{\#V_r(H)} \prod_{f \in F(H)} \text{tr}_N \Sigma^{f,t}.$$

Pour étudier les asymptotiques avec  $N$  grand, nous considérons des matrices de Wishart de paramètres  $\Sigma_i(N)$  et  $p_i(N)$  tels que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_i(N)}{N} = \lambda_i$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr}(q(\Sigma_1(N), \dots, \Sigma_s(N)))$$

existe pour tout polynôme  $q$  non commutatif.

Les cumulants du vecteur aléatoire  $Z_N = (\xi_1(N), \dots, \xi_m(N))$ , où  $\xi(N) = \text{tr}(q_i(W_1, \dots, W_s))$ , sont de la forme

$$c_{\mathbf{k}}(Z_N) = \sum_{g \geq 0} N^{2-2g-|\mathbf{k}|} \sum_{(V,E,F) \in \mathcal{H}(g, \mathbf{k})} \prod_{r=1}^s \left( \frac{p_r(N)}{N} \right)^{\#V_r} \prod_{f \in F} \text{tr}_N \Sigma^{f,t}(N).$$

La condition sur les matrices  $\Sigma_i(N)$  assure l'existence, pour chaque face  $f = j_1, \dots, j_k$ , d'une limite

$$m^f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr}(\Sigma_{t(j_1)}(N), \dots, \Sigma_{t(j_k)}(N)).$$

Il en découle que pour  $|\mathbf{k}| \geq 3$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} c_{\mathbf{k}}(Z_N) = 0$ . Si  $|\mathbf{k}| = 2$ , la somme sur les  $g$  étant finie, nous pouvons intervertir la limite et la somme, ce qui conduit à

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_{\mathbf{k}}(Z_N) = \sum_{(V,E,F) \in \mathcal{H}(0, \mathbf{k})} \prod_{r=1}^s \lambda_r^{\#V_r} \prod_{f \in F} m^f.$$

Pour  $|\mathbf{k}| = 1$ , le cumulant correspondant à  $k_i = 1$  n'est autre que  $\mathbb{E}(\xi)$ .

Or d'après le lemme suivant

**Lemme 3.9.** *Si  $\xi_1, \dots, \xi_m$  sont des variables aléatoires réelles dont les cumulants sont tels que  $c_{\mathbf{k}} = 0$  pour tout  $|\mathbf{k}| \geq 3$ , alors la loi jointe de  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  est gaussienne.*

Ce résultat n'est pas valable pour les variables complexes. Mais si  $q$  est l'un des polynômes précédents, nous pouvons l'écrire comme la somme de deux termes  $q = \frac{1}{2}(q + q^*) + \frac{1}{2}(q_q^*)$ , où le polynôme  $q^*$  s'obtient par conjugaison des coefficients de  $q$  et  $(pq)^* = q^*p^*$  ( $c$ 'est une involution). La trace des deux termes de la somme est réelle, et grâce à la multi-linéarité des cumulants, nous pouvons appliquer le lemme aux cumulants de la limite de  $Z_N - \mathbb{E}(Z_N)$ . D'où le théorème suivant (Bryc 2008)

**Théorème 3.10.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ ; posons  $p_j(N) = \lceil \lambda_j N \rceil$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Soient  $\Sigma_1(N), \dots, \Sigma_s(N)$  des matrices  $N \times N$  définies positives telles que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr}(q(\Sigma_1(N), \dots, \Sigma_s(N)))$$

existe pour tout polynôme non commutatifs  $q \in \mathcal{C} \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ . Considérons des matrices de Wishart  $W_1^{(N)} \in \mathcal{W}_N(\frac{1}{N}\Sigma_1(N), p_1(N)), \dots, W_s^{(N)} \in \mathcal{W}_N(\frac{1}{N}\Sigma_s(N), p_s(N))$  indépendantes.

Etant donné des polynômes  $q_1, \dots, q_m \in \mathcal{C} \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ , nous définissons le vecteur aléatoire  $Z_N = (\xi_1(N), \dots, \xi_s(N))$  où

$$\xi_i(N) = \text{tr}(q_i(W_1^{(N)}, \dots, W_s^{(N)})).$$

Alors, il existe un couple  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  de  $\mathbb{R}^m$ -vecteurs aléatoires de loi jointe gaussienne centrée tel que

$$Z_N - E(Z_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} X + iY.$$

#### 4. PREUVE DU THÉORÈME DE W. BRYC (BRYC 2008)

Nous reproduisons la démonstration de l'article en la détaillant un peu plus. Dans la suite, nous désignerons par  $[A]_{ij}$  le  $(i - j)$ -ème coefficient de  $A$  et écrirons par convenance  $h_j = h(j)$ . Tout d'abord un lemme

**Lemme 4.1.**

$$(13) \quad q_{\sigma, t, h}(X_1, \dots, X_s) = \sum_{J: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{i=1}^N [h_i X_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))},$$

où la somme porte sur toutes les fonctions  $J$  de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, N\}$ .

*Démonstration.* Soit un cycle  $c = (i_1, i_2, \dots, i_\omega) \in C(\sigma)$ , alors

$$\text{tr} \left( \prod_{r \in c} h_r X_{t(r)} \right) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\omega \leq N} [h_{i_1} X_{t(i_1)}]_{j_1 j_2} \cdots [h_{i_\omega} X_{t(i_\omega)}]_{j_\omega j_1}.$$

Introduisons pour chaque terme de la somme, la fonction  $J : \{i_1, \dots, i_\omega\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  définie par  $J(i_k) = j_k$ ; de telle sorte que  $J(c(i_k)) = j_{k+1}$ , avec la convention  $j_{\omega+1} = j_1$ . Nous obtenons ainsi

$$\text{tr} \left( \prod_{r \in c} h_r X_{t(r)} \right) = \sum_{J: \{i_1, \dots, i_\omega\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{i \in c} [h_i X_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))},$$

car  $\sigma$  coïncide avec le cycle  $c$  sur son domaine  $c$ .

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} q_{\sigma, t, h}(X_1, \dots, X_s) &= \sum_{c \in C(\sigma)} \sum_{J: c \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{i \in c} [h_i X_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))} \\ &= \sum_{J: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{c \in C(\sigma)} \prod_{i \in c} [h_i X_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))} \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue en étendant  $J$  aux supports disjoints des cycles de  $\sigma$ . □

Passons à la preuve du théorème.

*Démonstration.* Par indépendance, nous avons

$$\mathbb{E} \left( \exp \sum_{r=1}^s \text{tr}(\theta_r W_r) \right) = \prod_{r=1}^s \det(I - \theta_r \Sigma_r)^{-p_r}.$$

Notons

$$\begin{aligned} \theta_{r,i,j,0} &= \mathcal{R}e[\theta_r]_{ij}, & \theta_{r,i,j,1} &= \mathcal{I}m[\theta_r]_{ij} \\ W_{r,i,j,0} &= \mathcal{R}e[\theta_r]_{ij}, & W_{r,i,j,1} &= \mathcal{I}m[\theta_r]_{ij}. \end{aligned}$$

Comme

$$\text{tr}(\theta_r W_r) = \sum_{i=1}^N \theta_{r,i,j,0} W_{r,i,j,0} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} (\theta_{r,i,j,0} W_{r,i,j,0} + \theta_{r,i,j,1} W_{r,i,j,1}),$$

nous en déduisons que pour  $1 \leq i_k, j_k \leq N$ ,  $X_{\epsilon_k} \in \{0, 1\}$  et  $\epsilon_k = 0$  si  $i_k = j_k$ , l'expression

$$(14) \quad \frac{\partial^n}{\partial \theta_{r_1, i_1, j_1, \epsilon_1} \cdots \partial \theta_{r_n, i_n, j_n, \epsilon_n}} \prod_{r=1}^s \det(I - \theta_r \Sigma_r)^{-p_r} \Big|_{\theta_1 = \dots = \theta_s = 0} = \prod_{k=1}^n (2 - \delta_{i_k j_k}) \mathbb{E} \left( \prod_{k=1}^n W_{r_k, i_k, j_k, \epsilon_k} \right).$$

Le terme de gauche dans (14) est un polynôme fonction des variables  $p_1, \dots, p_s$  puisque obtenu par dérivation en  $\theta = 0$ , le déterminant étant alors égal à 1. Comme le terme de gauche de (11) est une combinaison linéaire d'expression apparaissant dans le terme de droit de (14), nous obtenons une identité entre polynômes ; il suffit donc de prouver cette identité pour  $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{N}$ .

Pour  $r = 1, 2, \dots, s$ , considérons des matrices aléatoires iid.  $X_r$  de taille  $p_r \times N$ , dont les entrées  $[X_r]_{ij}$  sont des variables complexes gaussiennes telles que

$$(15) \quad \mathbb{E}([X_r]_{ij}) = \mathbb{E}([X_r]_{ij}^2) = 0, \quad \mathbb{E}(|[X_r]_{ij}|^2) = 1.$$

Par ailleurs, toutes matrices hermitiennes définies positives  $\Sigma_r$  se factorisant sous la forme  $\Sigma_r = A_r A_r^*$ , nous en déduisons que les matrices  $W_r = A_r^* X_r^* X_r A_r \in \mathcal{W}_N(\Sigma_r, p_r)$ . D'après le lemme (4.1),

$$q_{\sigma, t, h}(W_1, \dots, W_s) = \sum_{J: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{i=1}^N [h_i A_{t(i)}^* X_{t(i)}^* X_{t(i)} A_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))}.$$

Un moment d'attention, nous convainc de l'identité suivante, valable pour deux matrices  $A, B$  quelconques de tailles respectives  $n \times p$  et  $p \times n$

$$\prod_{i=1}^n [AB]_{ij} = \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} = \sum_{K: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, p\}} \prod_{i=1}^n [A]_{iK(i)} [B]_{K(i)j}.$$

Il en découle alors, en sommant sur des applications de  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N [h_i A_{t(i)}^* X_{t(i)}^* X_{t(i)} A_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(i))} &= \sum_K [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [X_{t(i)}^* X_{t(i)} A_{t(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))} \\ &= \sum_{K, M} [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [X_{t(i)}^* X_{t(i)}]_{K(i)M(i)} [A_{t(i)}]_{M(i)J(\sigma(i))} \\ &= \sum_{K, L, M} [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [X_{t(i)}^*]_{K(i)L(i)} [X_{t(i)}]_{L(i)M(i)} [A_{t(i)}]_{M(i)J(\sigma(i))}, \end{aligned}$$

où les fonction  $K, M$  sont des fonctions de  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  et la fonction  $L$  appartient à l'ensemble

$$\mathcal{L} = \{L : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N} : L(i) \leq p_{t(i)} \text{ pour tout } i\}$$

afin de tenir compte de la taille variable des matrices  $X_i$ . Il en découle l'identité suivante

$$q_{\sigma, t, h}(W_1, \dots, W_s) = \sum_{J, K, L, M} \left( \prod_{i=1}^n [X_{t(i)}^*]_{K(i)L(i)} [X_{t(i)}]_{L(i)M(i)} \right) \times \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [A_{t(i)}]_{M(i)J(\sigma(i))}.$$

Les variables étant gaussiennes, le théorème de Wick permet de décomposer l'espérance du produit  $\prod_{i=1}^n [X_{t(i)}^*]_{K(i)L(i)} [X_{t(i)}]_{L(i)M(i)}$  en une somme d'espérance portant seulement sur des paires de variables ; les contributions non nulles à celle-ci proviennent alors exclusivement des termes de la forme  $[X_{t(i)}^*]_{K(i)L(i)} [X_{t(j)}]_{L(j)M(j)}$  pour  $t(i) = t(j)$  (donc de la même couleur),  $L(i) = L(j)$  et  $K(i) = M(j)$ . Du fait que  $t(i) = t(j)$ , nous pouvons trouver une permutation  $\alpha \in S_n(t)$  telle que  $j = \alpha(i)$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n [X_{t(i)}^*]_{K(i)L(i)} [X_{t(i)}]_{L(i)M(i)} \right) &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n \overline{[X_{t(i)}]_{L(i)K(i)}} [X_{t(\alpha(i))}]_{L(\alpha(i))M(\alpha(i))} \right) \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha, M=K \circ \alpha^{-1}}, \end{aligned}$$

la dernière ligne découlant de (15), et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(q_{\sigma, t, h}(W_1, \dots, W_s)) &= \sum_{J, K, L, M} \sum_{\alpha \in S_n(t)} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha, M=K \circ \alpha^{-1}} \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [A_{t(i)}]_{M(i)J(\sigma(i))} \\ &= \sum_{J, K} \sum_{\alpha \in S_n(t)} \sum_{L \in \mathcal{L}} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha} \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [A_{t(i)}]_{K(\alpha^{-1}(i))J(\sigma(i))} \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \left( \sum_{L \in \mathcal{L}} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha} \right) \sum_{J, K} \left( \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} \right) \prod_{j=1}^n [A_{t(\alpha^{-1}(j))}]_{K(\alpha^{-1}(j))J(\sigma(j))} \end{aligned}$$

car  $t(j) = t(\alpha^{-1}(j))$ .

Nous allons maintenant évaluer la somme  $\sum_{L \in \mathcal{L}} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha}$ . Pour cela, décomposons la permutation  $\alpha$  et l'application  $L$  en un  $s$ -uplets  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  de permutations sur  $t^{-1}(i)$  et  $L = (L_1, \dots, L_s)$  d'applications  $L_i : t^{-1}(i) \rightarrow \{1, \dots, p_i\}$  (nous supposons tous les  $t^{-1}(i)$  non vides pour simplifier les notations, dans le cas contraire le résultat obtenu ne change pas). Cette décomposition permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathcal{L}} \mathbf{1}_{L=L \circ \alpha} &= \sum_{(L_1, \dots, L_s) \in \mathcal{L}} \prod_{r=1}^s \mathbf{1}_{L_r = L_r \circ \alpha^{-1} \circ \sigma_r} \\ &= \prod_{r=1}^s \sum_{L_r : t^{-1}(r) \rightarrow \{1, \dots, p_r\}} \mathbf{1}_{L_r = L_r \circ \alpha^{-1} \circ \sigma_r}, \end{aligned}$$

ramenant ainsi notre évaluation à celle de la somme

$$\sum_{L : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \mathbf{1}_{L=L \circ \pi},$$

pour une permutation  $\pi \in S_n$ . Mais si  $L$  est invariante par l'action de  $\pi$ , alors  $L$  est constante sur le support de chaque cycle  $c \in C(\pi)$ ; ayant  $N$  possibilité pour le choix de cette constante, nous obtenons

$$\sum_{L: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}} \mathbf{1}_{L=L \circ \pi} = N^{\#C(\pi)}.$$

Finalement, nous aboutissons à l'expression

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(q_{\sigma,t,h}(W_1, \dots, W_s)) &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} \sum_{JK} \left( \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} \right) \prod_{j=1}^n [A_{t(\alpha^{-1}(j))}]_{K(\alpha^{-1}(j))J(\sigma(j))} \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} \sum_{JK} \left( \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^*]_{J(i)K(i)} [A_{t(i)}]_{K(i)J(\sigma(\alpha(i)))} \right) \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} \sum_J \prod_{i=1}^n [h_i A_{t(i)}^* A_{t(i)}]_{J(i)J(\sigma(\alpha(i)))} \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} \prod_{c \in C(\sigma\alpha)} \text{tr} \left( \prod_{i \in c} [h_i A_{t(i)}^* A_{t(i)}] \right) \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} \prod_{c \in C(\sigma\alpha)} \text{tr} \left( \prod_{i \in c} [h_i \Sigma_{t(i)}] \right) \\ &= \sum_{\alpha \in S_n(t)} \prod_{r=1}^s p_r^{\#C_r(\alpha)} q_{\sigma,t,h}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_s). \end{aligned}$$

□

*Remarque 4.2* (Cas des matrices du GUE). Peut-on calculer les mêmes expressions dans le cas des matrices du GUE( $N, 1$ ) ? Dans (Capitaine & Casalis, 2004), il est prouvé que si  $X$  est une matrice aléatoire  $N \times N$  hermitienne de distribution  $N(\theta, Id)$ , alors pour toutes matrices  $B_1, \dots, B_n$  de taille  $N$ , nous avons

$$\mathbb{E}(r_{\pi_0}(X B_1, \dots, X B_n)) = \sum_{\pi_1 \in S_n} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_n}(\pi_1^{-1} \pi_0) r_{\pi_1}(B_1 \theta_1, \dots, B_n \theta_n),$$

où  $\mathcal{D}_n$  désigne le sous-groupe des permutations de  $S_n$  dont la décomposition en cycles ne contient que des transpositions ou des singletons, et

$$\theta_j = \begin{cases} \theta & \text{si } \pi_1(j) = \pi_0(j), \\ Id & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient  $X_1, \dots, X_s$  des matrices  $N \times N$  hermitiennes de lois respectives  $N(\theta_i, \sigma^2 Id)$  indépendantes. Adoptons la démarche de (Bryc 2008); nous obtenons

$$\begin{aligned} q_{\sigma,t,h}(X_1, \dots, X_s) &= \prod_{c \in C(\sigma)} \text{tr} \left( \prod_{j \in c} X_{t(j)} h_{\sigma(j)} \right) \\ &= \sum_{J,K: [n] \rightarrow [N]} \prod_{i=1}^n [X_{t(i)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))}. \end{aligned}$$

Posons  $X_i = \sigma Y_i + \theta_i$  où  $Y_i \sim N(0, Id)$ , alors

$$\prod_{i=1}^n [\sigma Y_{t(i)} + \theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} = \sum_{\{B_1, B_2\} \in \mathcal{P}([n])} \left( \prod_{i \in B_1} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right) \left( \prod_{i \in B_2} \sigma [Y_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right).$$

D'après le théorème de Wick

$$\mathbb{E} \left( \prod_{i \in B_2} [Y_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right) = \sum_{\text{appariements } k \sim l} \prod \delta_{t(k)t(l)} \delta_{J(k)K(l)} \delta_{K(k)J(l)},$$

ce qui impose que  $B_2$  soit de cardinal pair et que les termes non nuls sont déterminés par les couples  $(k, \alpha_{B_2}(k))$  où  $\alpha_{B_2}$  est une involution sans point fixe sur  $B_2$  qui préserve les couleurs. Notons  $\text{Inv}_{B_2}^{\circ}(t)$  l'ensemble de ces involutions, nous avons

$$\mathbb{E} \left( \prod_{i \in B_2} \sigma [Y_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right) = \sigma^{|B_2|} \sum_{\alpha_{B_2} \in \text{Inv}_{B_2}^{\circ}(t)} 1_{K=J \circ \alpha_{B_2}}.$$

Nous pouvons prolonger  $\alpha_{B_2}$  en une involution  $\alpha$  sur  $[n]$  tout en préservant les couleurs, il suffit de poser  $\alpha(i) = i$  si  $i \in B_1$ . Nous désignerons par  $\text{Inv}_n(t)$  les involutions sur  $[n]$  préservant la coloration  $t$  et par  $\text{Fix}(\alpha)$  l'ensemble des points fixes de  $\alpha$ . Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n [X_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right) &= \sum_{\{B_1, B_2\} \in \mathcal{P}([n])} \left( \prod_{i \in B_1} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \right) \sigma^{|B_2|} \sum_{\alpha_{B_2} \in \text{Inv}_{B_2}^{\circ}(t)} 1_{K=J \circ \alpha_{B_2}}, \\ &= \sum_{\alpha \in \text{Inv}_n(t)} (\sigma^2)^{n-c(\alpha)} \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} 1_{K(i)=J(\alpha(i))}, \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} q_{\sigma, t, h}(X_1, \dots, X_s) &= \\ &= \sum_{J, K} \sum_{\alpha \in \text{Inv}_n(t)} (\sigma^2)^{n-c(\alpha)} \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} 1_{K(i)=J(\alpha(i))} \prod_{i=1}^n [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))}, \\ &= \sum_{\alpha \in \text{Inv}_n(t)} (\sigma^2)^{n-c(\alpha)} \sum_{J, K} \left( \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))} \right) \left( \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} 1_{K(i)=J(\alpha(i))} [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))} &= \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma \alpha(i)}]_{K(i)J(\sigma \alpha(i))}, \\ \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} 1_{K(i)=J(\alpha(i))} [h_{\sigma(i)}]_{K(i)J(\sigma(i))} &= \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} [h_{\sigma(\alpha(i))}]_{K(i)J(\sigma(\alpha(i)))}. \end{aligned}$$

Introduisons les matrices

$$\theta_i^{(\alpha)} = \begin{cases} \theta_i & \text{si } \alpha(i) = i, \\ Id & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} & \sum_{J,K} \left( \prod_{i \in \text{Fix}(\alpha)} [\theta_{t(i)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma\alpha(i)}]_{K(i)J(\sigma\alpha(i))} \right) \left( \prod_{i \notin \text{Fix}(\alpha)} [Id]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma\alpha(i)}]_{K(i)J(\sigma\alpha(i))} \right) = \\ & = \sum_{J,K} \prod_{i=1}^n [\theta_{t(i)}^{(\alpha)}]_{J(i)K(i)} [h_{\sigma\alpha(i)}]_{K(i)J(\sigma\alpha(i))}, \\ & = q_{\sigma\alpha,h,t}(\theta_1^{(\alpha)}, \dots, \theta_s^{(\alpha)}). \end{aligned}$$

Finallement, nous obtenons

$$\mathbb{E}q_{\sigma,t,h}(X_1, \dots, X_s) = \sum_{\alpha \in \text{Inv}_n(t)} (\sigma^2)^{n-c(\alpha)} q_{\sigma\alpha,h,t}(\theta_1^{(\alpha)}, \dots, \theta_s^{(\alpha)}).$$

#### RÉFÉRENCES

- Capitaine, M., Casalis, M. Asymptotic Freeness by Generalised Moments for Gaussian and Wishart Matrices. Applications to Beta Random Matrices. *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 53, N.2, 2004.
- Bryc.,W. Asymptotic normality for traces of polynomials in independent complex Wishart matrices *Probab. Theory Relat. Fields*, 140 :383–405, 2008.
- Graczyk,P., Letac, G., Massam, H. The complex Wishart distribution and the symmetric group *Ann. Stat.* 31(1), 287–309, 2003.
- Hanlon, P.J., Stanley, R.P. Stembridge, J.R. Somme combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices. *Comtemp. Math.*, vol. 138, 151–174, 1992.
- Mingo, J.A., Nica, A. Annular noncrossing permutations and partitions, and second-order asymptotics for random matrices. *Int. Math. Res. Notes* **28**, 1413–1460, 2004.
- Speed, T.P. Cumulants and partition lattices. *Aust. J. Stat.* **25**(2), 378–388, 1983.
- Stanley, R.P. Enumerative combinatorics. vol. 2 *Cambridge University Press* 1999.

*E-mail address:* pascal.lezaud@recherche.enac.fr